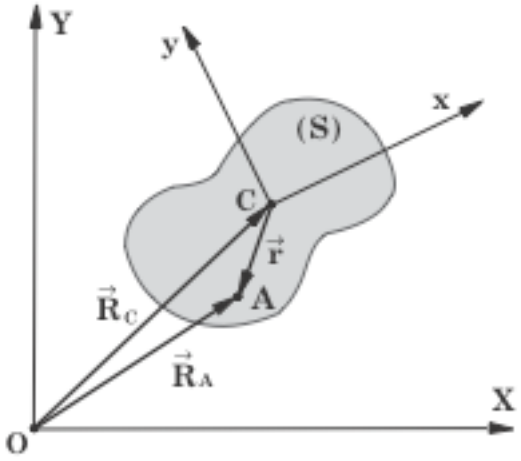
ΜΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΡΟΚΥΨΕΙ ΑΠΟ ΚΥΛΙΣΗ;

Ένα στερεό σώμα εκτελεί επίπεδη κίνηση, όταν οι αποστάσεις των υλικών του σημείων από ένα ορισμένο επίπεδο αναφοράς (ε), παραμένουν αμετάβλητες με τον χρόνο. Για την μελέτη της επίπεδης κίνησης στερεού σώματος αρκεί να μελετήσουμε την κίνηση μιας τομής (S) αυτού, με επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο αναφοράς (ε) και διερχόμενο από κάποιο χαρακτηριστικό σημείο του σώματος, που ονομάζεται πόλος της επίπεδης κίνησης. Εάν ο πόλος της κίνησης είναι το κέντρο μάζας C του σώματος, τότε η τομή (S) ονομάζεται κύρια τομή του στερεού σώματος. Κατά την επίπεδη κίνηση η κύρια τομή μετατοπίζεται σε σταθερό επίπεδό OXY, που σημαίνει ότι τόσο το κέντρο μάζας C του σώματος όσο και οποιοδήποτε σημείο A της κύριας τομής μετατοπίζεται ως προς την αρχή O του OXY, που είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Εάν $\vec{\mathbf{R}}_A$ $\vec{\mathbf{R}}_C$ είναι τα διανύσματα θέσεως των A και C αντιστοίχως ως προς την αρχή O και $\vec{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα θέσεως του A ως προς το C, θα ισχύει η σχέση:

$$\vec{\mathbf{R}}_A = \vec{\mathbf{R}}_C + \vec{\mathbf{r}} \qquad (1)$$



Σχήμα 1

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς τον χρόνο t παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{\mathbf{R}}_A}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{R}}_C}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \Rightarrow \vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_C + \vec{\mathbf{v}}_{A/C} \qquad (2)$$

όπου $\vec{\mathbf{v}}_A$, $\vec{\mathbf{v}}_C$ οι ταχύτητες των A και C αντιστοίχως στο σύστημα OXY και $\vec{\mathbf{v}}_{A/C}$ η ταχύτητα του A ως προς την κινητή αρχή C ή το ίδιο ως προς το μη αδρανει ακό σύστημα αναφοράς Cxy, που είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το σώμα. Όμως, αν $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του σημείου A περί άξονα κάθετο στην κύρια τομή και διερχόμενο από το C, θα ισχύει $\vec{\mathbf{v}}_{A/C} = (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}})$ και η (2) γράφεται:

$$\vec{\mathbf{v}}_A = \vec{\mathbf{v}}_C + (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}) \qquad (3)$$

Η σχέση (3) μας επιτρέπει να διατυπώσουμε την εξής πρόταση:

Η ταχύτητα ένος σημείου στερεού σώματος που εκτελεί επίπεδη κίνηση, θεωρούμενη ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας $\vec{v}_C$ ***του κέντρου μάζας του ως προς το σύστημα αυτό και της ταχύτητας*** $(\vec{\omega} \times \vec{r})$ ***του σημείου, της οφειλόμενης στην περιστροφή του σώματος περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας του και κάθετο στο επίπεδο κίνησης.***

<u>Παρατήρηση 1η</u>:

Εάν η αρχή του κινητού συστήματος αναφοράς δεν ληφθεί το κέντρο μάζας C του σώματος, αλλά ένα οποιοδήποτε σημείο P της κύριας τομής, του οποίου η επιβατική ακτίνα ως προς το C είναι $\vec{\alpha}$, τότε η (3) γράφεται:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + [\vec{\omega} \times (\vec{r}' + \vec{\alpha})] = \vec{v}_C + (\vec{\omega} \times \vec{\alpha}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \qquad (4)$$

όπου $\vec{r}'$ το διάνυσμα θέσεως του σημείου A ως προς την νέα αρχή P. Όμως η ταχύτητα $\vec{v}_A$ μπορεί να εκφρασθεί και ως συνάρτηση της ταχύτητας $\vec{v}_P$ της αρχής P ως προς το OXY και της νέας γωνιακής ταχύτητας περιστροφής $\vec{\omega}'$ περί άξονα διερχόμενο από την αρχή P και κάθετο στο επίπεδο κίνησης, δηλαδή θα ισχύει:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + (\vec{\omega}' \times \vec{r}') \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (5) παίρνουμε:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + (\vec{\omega} \times \vec{\alpha}) \quad \text{και} \quad \vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι ανεξάρτητη από την εκλογή του κινητού συστήματος συντεταγμένων.

<u>Παρατήρηση 2η</u>:

Είναι δυνατόν να επιλέξουμε μία αρχή P, της οποίας η ταχύτητα $\vec{v}_P$ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς OXY να είναι μηδενική, οπότε σύμφωνα με την (5) θα έχουμε για την ταχύτητα $\vec{v}_A$ την σχέση:

$$\vec{v}_A = (\vec{\omega}' \times \vec{r}')$$

δηλαδή η κίνηση του στερεού θα είναι γνήσια περιστροφή περί άξονα διερχόμενο από την αρχή P και κάθετο στο επίπεδο κίνησης. Ο άξονας αυτός ονομάζεται **στιγμιαίος άξονας** περιστροφής του στερεού η δε σημείο P ονομάζεται **στιγμιαίο κέντρο** περιστροφής ή **στιγμιαίος πόλος** της επίπεδης κίνησης. Ο στιγμιαίος πόλος μπορεί να ανήκει στην κύρια τομή του σώματος ή στην επέκτασή της. Ας δέχθούμε τώρα ότι το σημείο A της κύριας τομής αποτελεί κατά την χρονική στιγμή t στιγμιαίο πόλο του στερεού, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

$$\vec{0} = \vec{v}_C + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{0} = \vec{v}_C + [\vec{\omega} \times (\vec{R}_A - \vec{R}_C)] \Rightarrow$$

$$[\vec{\omega} \times (\vec{R}_A - \vec{R}_C)] = -\vec{v}_C \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά τα δύο μέλη της (6) με το διάνυσμα $\vec{\omega}$ παίρνου με την σχέση:

$$\{\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{R}_A - \vec{R}_C)]\} = -(\vec{\omega} \times \vec{v}_C)$$

η οποία με βάση την διανυσματική ταυτότητα:

$$[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$$

γράφεται:

$$\vec{\omega}[\vec{\omega} \cdot (\vec{R}_A - \vec{R}_C)] - (\vec{R}_A - \vec{R}_C)(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -(\vec{\omega} \times \vec{v}_C)$$

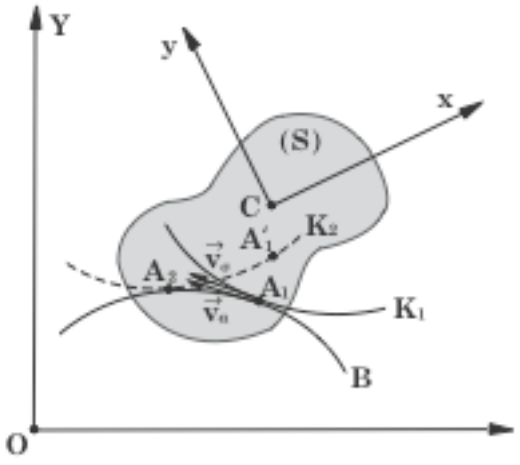
Όμως το διάνυσμα $\vec{\omega}$ είναι κάθετο στο $(\vec{R}_A - \vec{R}_C)$, οπότε το εωτερικό τους γίνο μενο είναι μηδενικό και η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$-(\vec{R}_A - \vec{R}_C)\omega^2 = -(\vec{\omega} \times \vec{v}_C) \Rightarrow \vec{R}_A = \vec{R}_C + \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v}_C)}{\omega^2} \quad (7)$$

Η (7) επιτρέπει τον καθορισμό της θέσεως του στιγμιαίου πόλου Α ως προς την αρχή Ο κατά μια χρονική στιγμή t σε συνάρτηση με τα αντίστοιχα στοιχεία $\vec{R}_C$, $\vec{v}_C$, $\vec{\omega}$ της επίπεδης κίνησης. Η πιο πάνω σχέση (7) γράφεται:

$$\vec{R}_A - \vec{R}_C = \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v}_C)}{\omega^2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{r} = \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v}_C)}{\omega^2} \quad (8)$$

Η (8) καθορίζει την θέση του στιγμιαίου πόλου Α ως προς το κέντρο μάζας C, δηλαδή ως προς το κινητό μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς Cxy. Με βάση τα



Σχήμα 2

προηγούμενα γίνεται αντιληπτό ότι κατά την κίνηση του στερεού το γεωμετρι κό σημείο που κάθε στιγμή συμπίπτει με τον αντίστοιχο στιγμιαίο πόλο του δι αγράφει ως προς μεν το αδρανειακό σύστημα OXY μια τροχιά Β που περιγρά φεται από την (7), ως προς δε το κινητό μη αδρανειακό σύστημα Cxy μια τροχιά

Κ που περιγράφεται από την (8). Η τροχιά Β είναι μια απόλυτη τροχιά συσχε τισμένη με το σύστημα ΟΧΥ και ονομάζεται **βάση του σώματος** ή **κεντρώδες χώρου** η δε τροχιά Κ είναι μια σχετική τροχιά συσχετισμένη με το κινητό σύστημα Cxy και ονομάζεται **κυλιόμενη του σώματος** ή **κεντρώδες** αυτού. Θα δείξουμε ότι οι δύο αυτές τροχιές εφάπτονται κάθε στιγμή στην θέση του αντίστοιχου στιγμιαίου πόλου και ότι τα μήκη των τόξων που διαγράφει επί των τροχιών αυτών ο στιγμιαίος πόλος σε δεδομένο χρόνο είναι ίσα. Ας δεχθού με ότι το γεωμετρικό σημείο Α που κάποια χρονική στιγμή t συμπίπτει με τον αντίστοιχο στιγμιαίο πόλο του στερεού, έχει ως προς μεν το σύστημα ΟΧΥ τα χύτητα $\vec{\mathbf{v}}_\alpha$ (απόλυτη ταχύτητα) ως προς δε το σύστημα Cxy ταχύτητα $\vec{\mathbf{v}}_\sigma$ (σχε τική ταχύτητα). Τότε τα διανύσματα $\vec{\mathbf{v}}_\alpha$, $\vec{\mathbf{v}}_\sigma$ θα ικανοποιούν την σχέση:

$$\vec{\mathbf{v}}_\alpha = \vec{\mathbf{v}}_\sigma + \vec{\mathbf{v}}_\mu \qquad (9)$$

όπου $\vec{\mathbf{v}}_\mu$ η μετοχική ταχύτητα του Α, δηλαδή η ταχύτητά του αν αυτό ήταν στα θερά συνδεδεμένο με το σύστημα Cxy και μετείχε της κινήσεώς του. Όμως την χρονική στιγμή t ισχύει $\vec{\mathbf{v}}_\mu = \vec{\mathbf{0}}$, διότι το σημείο Α κατέχει την θέση του στιγμι αίου πόλου, οπότε η (9) δίνει $\vec{\mathbf{v}}_\alpha = \vec{\mathbf{v}}_\sigma$ που σημαίνει ότι οι τροχιές Β και Κ έχουν την χρονική στιγμή t κοινή εφαπτομένη, δηλαδή οι δύο αυτές συνεπίπεδες τροχιές εφάπτονται στην θέση Α του αντίστοιχου στιγμιαίου πόλου. Εξάλλου η τροχιά Β έχει σταθερή θέση στο ΟΧΥ, ενώ η Κ μετακινείται συνεχώς ως προς το σύστημα αυτό, έστω δε ότι κατά τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 οι αντίστοιχες θέσεις της K_1, K_2 είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα (2). Το σημείο επαφής τους θα έχει μετατοπιστεί κατά τον χρόνο t_2-t_1 επί μεν της τροχιάς Β από την θέση A_1 στην θέση A_2, επι δέ της τροχιάς Κ από την θέση A_1 στην θέση A'_1, δηλαδή ο στιγμιαίος πόλος στον χρόνο t_2-t_1 διέγραψε επί μεν της τροχιάς Β το τόξο A_1A_2 επί δε της τροχιάς Κ το τόξο $A_1A'_1$. Για τα μήκη των τόξων αυτών ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{A_1A_2} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{v}_\alpha \mathbf{dt}) \quad \textbf{και} \quad \mathbf{A_1A'_1} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{v}_\sigma \mathbf{dt})$$

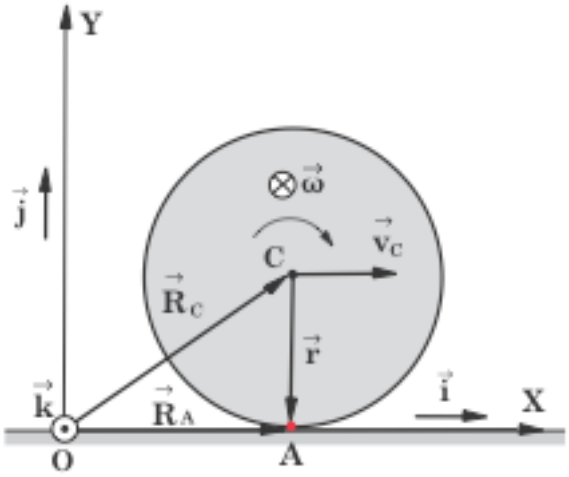
οι οποίες λόγω της $\vec{\mathbf{v}}_\alpha = \vec{\mathbf{v}}_\sigma$ δίνουν $\mathbf{A_1A_2} = \mathbf{A_1A'_1}$. Κατά την επίπεδη λοιπόν κίνη ση του στερεού σώματος η τροχιά Κ κινείται επί της σταθερής τροχιάς Β εφα πτόμενη συνεχώς αυτής, το δε σημείο επαφής διαγράφει πάνω σ΄αυτές ίσα τόξα. Η ιδιότυπη αυτή κίνηση της τροχιάς Κ επί της Β ονομάζεται **κύλιση**. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάθε επίπεδη κίνηση στερε ού, με εξαίρεση την μεταφορική κίνηση, μπορεί να παραχθεί διά κυλίσεως μιας καμπύλης γραμμής, σταθερά συνδεδεμένης με την κύρια τομή του στερεού, επί μιας σταθερής καμπύλης που βρίσκεται στο επίπεδο της κύριας τομής. Για την πληρέστερη κατανόηση όσων αναφέρθηκαν στα προηγούμενα, θα εξετάσουμε τα εξής δύο παραδείγματα:

Παραδειγμα 1ο **Ένας κύλινδρος κινείται επί οριζοντίου εδάφους εφαπτόμενος αυτού με την παράπλευρη επιφάνειά του, ώστε ο γεωμε τρικός του άξονας να μετατοπίζεται ευθύγραμμα, ενώ ο κύλινδρος**

περιστρέφεται περί τον άξονα αυτόν. Να βρείτε την κυλιόμενη καμπύλη Κ και την βάση Β της κίνησης του κυλίνδρου.

ΛΥΣΗ: Η κίνηση του κυλίνδρου είναι μια επίπεδη κίνηση της οποίας η κύρια τομή (S) είναι κύκλος ακτίνας ίσης με την ακτίνα r του κυλίνδρου, ο οποίος εφάπτεται του οριζόντιου εδάφους. Εάν $\vec{\mathbf{v}}_C$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας C του κυλίνδρου και $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του, τότε το διάνυσμα θέσεως $\vec{\mathbf{R}}_A$ του στιγμιαίου πόλου Α της κίνησης του κυλίνδρου, ως προς την αρχή Ο του αδρανειακού συστήματος αναφοράς ΟΧΥ, θα ικανοποιεί την σχέση:

$$\vec{\mathbf{R}}_A = \vec{\mathbf{R}}_C + \frac{(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}_C)}{\boldsymbol{\omega}^2} \qquad (1)$$



Σχήμα 3

όπου $\vec{\mathbf{R}}_C$ το διάνυσμα θέσεως του κέντρου μάζας C ως προς την αρχή Ο. Εάν X_A, Y_A είναι οι συνιστώσες (αλγεβρικές τιμές) του διανύσματος $\vec{\mathbf{R}}_A$ και X_C η Χ-συνιστώσα του $\vec{\mathbf{R}}_C$ η (1) γράφεται:

$$\mathbf{X}_A\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y}_A\vec{\mathbf{j}} = \mathbf{X}_C\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{r}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\left(-\boldsymbol{\omega}\vec{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_C\vec{\mathbf{i}}\right)}{\boldsymbol{\omega}^2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}_A\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y}_A\vec{\mathbf{j}} = \mathbf{X}_C\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{r}\vec{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{v}_C}{\boldsymbol{\omega}}\left(\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}}\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}_A\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y}_A\vec{\mathbf{j}} = \mathbf{X}_C\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{r}\vec{\mathbf{j}} - \frac{\mathbf{v}_C\vec{\mathbf{j}}}{\boldsymbol{\omega}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{X}_A = \mathbf{X}_C \\ \mathbf{Y}_A = \mathbf{r} - \mathbf{v}_C / \boldsymbol{\omega} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

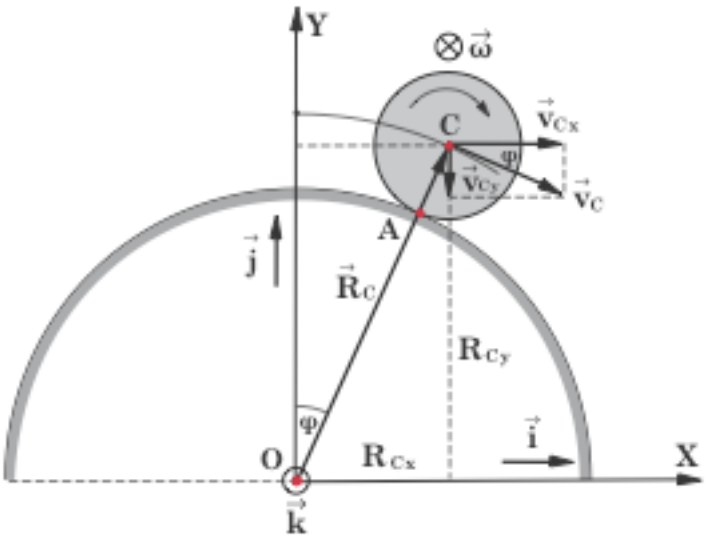
όπου $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων ΟΧ και ΟΥ αντιστοίχως. Οι σχέσεις (2) εξασφαλίζουν ότι, ο στιγμιαίος πόλος Α βρίσκεται συνεχώς κάτω από το κέντρο μάζας C σε απόσταση v_C/ω από αυτό, που σημαίνει ότι η βάση (Β) της κίνησης του κυλίνδρου είναι μια ευθεία γραμμή παράλληλη πρός το έδαφος σε απόσταση $r\text{-}v_C/\omega$ από αυτό. Εξάλλου το διάνυσμα θέσεως $\vec{\mathbf{R}}'_A$ του στιγμιαίου πόλου Α, ως προς το κέντρο μάζας C, ικανοποιεί την σχέση:

$$\vec{R}'_A = \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v}_C)}{\omega^2} = \frac{\left(-\omega\vec{k} \times v_C\vec{i}\right)}{\omega^2} = -\frac{v_C\vec{j}}{\omega} \qquad (3)$$

δηλαδή η κυλιόμενη (K) της κίνησης του κυλίνδρου είναι περιφέρεια κέντρου C και ακτίνας v_C/ω. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η επίπεδη κίνηση του κυλίνδρου επί του οριζόντιου εδάφους παράγεται διά κυλίσεως της περιφέρειας (C, v_C/ω) επί της ευθείας $Y_A=r-v_C/\omega$. Στην ειδική περίπτωση που ισχύει $v_C=r\omega$, τότε η κυλιόμενη (K) είναι η περιφέρεια της κύριας τομής (S) του κυλίνδρου και η βάση (B) η ευθεία OX του εδάφους. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο κύλινδρος κυλίεται επί του εδάφους.

Παράδειγμα 2ο **Ομογενής σφαίρα ακτίνας r κινείται επί σταθερού ημισφαιρίου κέντρου O και ακτίνας R>r εφαπτόμενη αυτού, ώστε το κέντρο της C να διαγράφει επί κατακορύφου επιπέδου κυκλικό τόξο κέντρου O και ακτίνας R-r. Εάν η σφαίρα έχει και περιστροφική κίνηση περί οριζόντιο άξονα διερχόμενο από το κέντρο της, να βρεθεί η κυλιόμεμη καμπύλη (K) και η βάση (B) της επίπεδης κίνησης της σφαίρας.**

<u>ΛΥΣΗ</u>: Στο παράδειγμα αυτό πρόκειται για επίπεδη κίνηση σφαίρας επί της κυρτής επιφάνειας σταθερού ημισφαιρίου. Η κύρια τομή (S) της σφαίρας είναι κύκλος ακτίνας r που εφάπτεται του ημισφαιρίου ακτίνας R, το δε κέντρο του διαγράφει κυκλικό τόξο ακτίνας R-r. Εάν $\vec{v}_C$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα του



Σχήμα 4

κέντρου C της σφαίρας και $\vec{\omega}$ η αντίστοιχη γωνιακή της ταχύτητα, τότε το διάνυσμα θέσεως $\vec{R}_A$ του αντίστοιχου στιγμιαίου πόλου A της σφαίρας ως προς την αρχή O του αδρανειακού συστήματος αναφοράς OXY, θα ικανοποιεί την σχέση:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_C + \frac{(\vec{\omega} \times \vec{v}_C)}{\omega^2} \qquad (1)$$

όπου $\vec{\mathbf{R}}_C$ το διάνυσμα θέσεως του κέντρου μάζας C ως προς την αρχή Ο. Η πιο πάνω σχέση γράφεται:

$$\mathbf{X_A}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y_A}\vec{\mathbf{j}} = \mathbf{X_C}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y_C}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\left(\vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_C\right)}{\omega^2} \qquad (2)$$

όπου (X_A, Y_A) είναι οι συνιστώσες (αλγεβρικές τιμές) του διανύσματος $\vec{\mathbf{R}}_A$, (X_C,Y_C) οι συνιστώσες (αλγεβρικές τιμές) του $\vec{\mathbf{R}}_C$ και $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων ΟΧ και ΟΥ αντιστοίχως. Όμως έχουμε τις σχέσεις:

$$\mathbf{X_C} = \left(\mathbf{R}+\mathbf{r}\right)\eta\mu\varphi \quad \text{και} \quad \mathbf{Y_C} = \left(\mathbf{R}+\mathbf{r}\right)\sigma\upsilon\nu\varphi$$

όπου φ η γωνία του διανύσματος $\vec{\mathbf{R}}_C$ με τον άξονα ΟΥ, οπότε η (2) γράφεται:

$$\mathbf{X_A}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y_A}\vec{\mathbf{j}} = \left(\mathbf{R}+\mathbf{r}\right)\left(\eta\mu\varphi\vec{\mathbf{i}} + \sigma\upsilon\nu\varphi\vec{\mathbf{j}}\right) + \frac{\left(\vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_C\right)}{\omega^2} \qquad (3)$$

Εξάλλου για το εξωτερικό γινόμενο $(\vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_C)$ ισχύει:

$$\left(\vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_C\right) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\omega \\ \mathbf{v_{Cx}} & \mathbf{v_{Cy}} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\omega \\ \mathbf{v}_C\eta\mu\varphi & \mathbf{v}_C\sigma\upsilon\nu\varphi & \mathbf{0} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}_C\right) = -\omega\mathbf{v}_C\eta\mu\varphi\vec{\mathbf{i}} - \omega\mathbf{v}_C\sigma\upsilon\nu\varphi\vec{\mathbf{j}} = -\omega\mathbf{v}_C\left(\eta\mu\varphi\vec{\mathbf{i}} + \sigma\upsilon\nu\varphi\vec{\mathbf{j}}\right) \qquad (4)$$

όπου $\vec{\mathbf{k}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κάθετη διεύθυνση στο επίπεδο ΟΧΥ. Με βάση την (4) η (3) γράφεται:

$$\mathbf{X_A}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y_A}\vec{\mathbf{j}} = \left(\mathbf{R}+\mathbf{r}\right)\left(\eta\mu\varphi\vec{\mathbf{i}} + \sigma\upsilon\nu\varphi\vec{\mathbf{j}}\right) - \frac{\omega\mathbf{v}_C}{\omega^2}\left(\eta\mu\varphi\vec{\mathbf{i}} + \sigma\upsilon\nu\varphi\vec{\mathbf{j}}\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{X_A}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{Y_A}\vec{\mathbf{j}} = \left(\mathbf{R} + \mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}_C}{\omega}\right)\left(\eta\mu\varphi\vec{\mathbf{i}} + \sigma\upsilon\nu\varphi\vec{\mathbf{j}}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X_A} &= \left(\mathbf{R}+\mathbf{r}\right)\eta\mu\varphi - \mathbf{v}_C\eta\mu\varphi/\omega \\ \mathbf{Y_A} &= \left(\mathbf{R}+\mathbf{r}\right)\sigma\upsilon\nu\varphi - \mathbf{v}_C\sigma\upsilon\nu\varphi/\omega \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Οι σχέσεις (5) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις του στιγμιαίου πόλου της επίπεδης κίνησης της σφαίρας, ως προς το αδρανειακό σύστημα ΟΧΥ. Στην περί πτωση που ισχύει $v_C=\omega r$ οι σχέσεις (5) δίνουν:

$$\mathbf{X_A} = \mathbf{R}\eta\mu\varphi \quad \text{και} \quad \mathbf{Y_A} = \mathbf{R}\sigma\upsilon\nu\varphi$$

δηλαδή στην περίπτωση αυτή η βάση (Β) της επίπεδης κίνησης είναι η περιφέρεια κέντρου Ο και ακτίνας R. Εξάλλου το διάνυσμα θέσεως $\vec{R}'_A$ του στιγμιαίου πόλου Α ως προς το κέντρο C, ικανοποιεί την σχέση:

$$\vec{R}'_A = \frac{(\vec{\omega}\times\vec{v}_C)}{\omega^2} \overset{(4)}{\Rightarrow} \vec{R}'_A = -\frac{v_C}{\omega}(\eta\mu\varphi\,\vec{i} + \sigma\upsilon\nu\varphi\,\vec{j}) \Rightarrow$$

$$|\vec{R}'_A|^2 = \frac{v_C^2}{\omega^2} \Rightarrow |\vec{R}'_A| = \frac{v_C}{\omega}$$

Στην περίπτωση που ισχύει $v_C=\omega r$, η προηγούμενη σχέση δίνει $|\vec{R}'_A| = r$ δηλαδή η κυλιόμενη καμπύλη (Κ) της επίπεδης κίνησης είναι η κύρια τομή (S). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η σφαίρα ακτίνας r κυλίεται επί του σταθερού ημισφαιρίου ακτίνας R.

P.M. fysikos

ΑΣΚΗΣΗ 1η **Ομογενής κύλινδρος ακτίνας r κυλίεται επί κοίλης κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R>r, ώστε ο άξονας του κυλίνδρου να παραμένει παράλληλος πρός τον άξονα της κυλινδρικής επιφάνειας. Την στιγμή t=0 που ο κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος η ευθεία που συνδέει το κέντρο μάζας C του κυλίνδρου με το κέντρο Ο της κυλινδρικής επιφάνειας σχηματίζει με την κατακόρυφη διεύθυνση γωνία $\varphi_0<\pi/2$.**

i) Εάν ο συντελεστής οριακής τριβής στην επαφή των δύο κυλίνδρων είναι $n=\sqrt{3}/9$, να βρείτε την μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της γωνίας φ_0, ώστε να εξασφαλίζεται η κύλιση του κυλίνδρου.

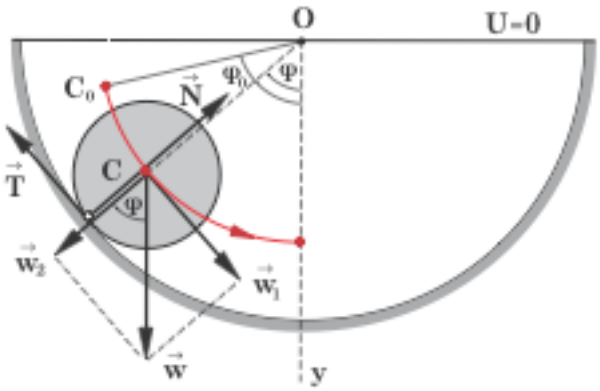
ii) Τι θα συμβεί αν $\varphi_0=\pi/2$ και τι αν η γωνία φ_0 είναι πολύ μικρή;

Δίνεται η ροπή αδράνειας $I=mr^2/2$ του κυλίνδρου ως προς τον γεωμετρικό του άξονα.

ΛΥΣΗ: i) Εξετάζουμε τον κύλινδρο την χρονική στιγμή t που η ευθεία OC σχηματίζει με την κατακόρυφη διεύθυνση Oy γωνία φ. Την στιγμή αυτή ο κύλινδρος δέχεται το βάρος του $\vec{w}$ και την δύναμη επαφής από την κυλινδρική επιφάνεια, η οποία αναλύεται στην στατική τριβή $\vec{T}$ με φορέα εφαπτόμενο των δύο κυλίνδρων και στην κάθετη αντίδραση $\vec{N}$, με φορέα την ευθεία CO. Το κέντρο μάζας C του κυλίνδρου διαγράφει κυκλική τροχιά κέντρου Ο και ακτίνας R-r κινείται δε ως υλικό σημείο μάζας m=w/g επί του οποίου επιδρούν οι

δυνάμεις $\vec{w}$, $\vec{N}$ και $\vec{T}$. Εφαρμόζοντας για κυλιόμενο κύλινδρο το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας κατά την μετατόπισή του από την αρχική του θέση στην θέση φ, παίρνουμε:

$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{(t)} + K_{(t)} \Rightarrow$$



Σχήμα 5

$$-mg(R-r)\sigma\upsilon\nu\varphi_0 + 0 = -mg(R-r)\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2} \Rightarrow$$

$$mg(R-r)(\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi_0) = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{4} \Rightarrow$$

$$4g(R-r)(\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi_0) = 2v_C^2 + r^2\omega^2 \quad (1)$$

όπου $\vec{v}_C$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας C και $\vec{\omega}$ γωνιακή ταχύτητα της περιστροφής του κυλίνδρου περί τον γεωμετρικό του άξονα. Όμως λόγω της κύλισης ισχύει $v_C=\omega r$, οπότε η (1) γράφεται:

$$4g(R-r)(\sigma\upsilon\nu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi_0) = 2v_C^2 + v_C^2 \Rightarrow$$

$$v_C^2 = 4g(R-r)(\sigma\upsilon\nu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi_0)/3 \quad (2)$$

Όμως η συνισταμένη των ακτινικών δυνάμεων $\vec{N}$ και $\vec{w}_2$ αποτελεί κεντρομόλο δύναμη για το κέντρο μάζας C του κυλίνδρου, οπότε θα ισχύει:

$$N - w_2 = \frac{mv_C^2}{R-r} \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{mv_C^2}{R-r} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{4mg(R-r)(\sigma\upsilon\nu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi_0)}{3(R-r)} \Rightarrow$$

$$N = mg\left[\sigma\upsilon\nu\varphi + 4(\sigma\upsilon\nu\varphi-\sigma\upsilon\nu\varphi_0)/3\right] \quad (3)$$

Εξάλλου η συνισταμένη των εφαπτομενικών δυνάμεων $\vec{w}_1$ και $\vec{T}$ αποτελεί για την κίνηση του κέντρου μάζας C επιτρόχια δύναμη, οπότε σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα θα ισχύει η σχέση:

$$w_1 - T = ma_e \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - T = ma_e \quad (4)$$

όπου $\vec{a}_e$ η επιτρόχια επιτάχυνση του κέντρου C. Εφαρμόζοντας για τον κύλιν δρο τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης παίρνουμε την σχέση:

$$Tr = I_C\omega' \Rightarrow Tr = mr^2\omega'/2 \Rightarrow T = mr\omega'/2 \quad (5)$$

Όμως λόγω της κύλισης ισχύει $a_e=\omega' r$, οπότε η (5) γράφεται:

$$T = ma_e/2 \quad (6)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (6) παίρνουμε:

$$\frac{mg\eta\mu\varphi - T}{T} = 2 \Rightarrow T = \frac{mg\eta\mu\varphi}{3} \quad (7)$$

Επειδή η τριβή $\vec{T}$ είναι στατική θα ισχύει $T\le nN$, η οποία συνδυαζόμενη με τις σχέσεις (3) και (7) δίνει:

$$\frac{mg\eta\mu\varphi}{3} \le nmg\left[\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{4(\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi_0)}{3}\right] \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi \le n\left[3\sigma\upsilon\nu\varphi + 4(\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi_0)\right] \quad (8)$$

Η σχέση (8) πρέπει να ισχύει και κατά την έναρξη της κίνησης, δηλαδή για $\varphi=\varphi_0$, οπότε θα έχουμε:

$$\eta\mu\varphi_0 \le 3n\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0/\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \le 3n \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\varphi_0 \le 3n \Rightarrow \varepsilon\phi\varphi_0 \le 3\sqrt{3}/9 \Rightarrow \varepsilon\phi\varphi_0 \le \sqrt{3}/3 \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\varphi_0 \le \varepsilon\phi(\pi/3) \Rightarrow (\varphi_0)_{max} = \pi/3$$

ii) Αν δεχθούμε ότι $\varphi_0=\pi/2$, τότε η σχέση $\varepsilon\phi\varphi_0\le 3n$ επιβάλλει θεωρητικά άπειρο συντελεστή οριακής τριβής για να εξασφαλίζεται η κύλιση του κυλίνδρου, που σημαίνει ότι όταν ο κύλινδρος αφεθεί ελεύθερος αρχικά θα ολισθαίνει περιστρε φόμενος και πιθανόν από κάποια στιγμή και μετά να κυλίεται χωρίς ολίσθηση.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τι θα συμβεί, όταν η γωνία φ_0 είναι πολύ μικρή (λογουχάρη της τάξεως των πέντε μοιρών). Διαφορίζοντας την (2) παίρνουμε:

$$2v_C dv_C = -4g(R-r)\eta\mu\varphi\, d\varphi/3 \Rightarrow v_C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{2g(R-r)}{3}\eta\mu\varphi\frac{d\varphi}{dt} \quad (9)$$

Όμως για την ταχύτητα $\vec{v}_C$ ισχύει και η σχέση:

$$v_C = (R-r)\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} = (R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

οπότε η (9) γράφεται:

$$(R-r)\frac{d\varphi}{dt}(R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2g(R-r)}{3}\eta\mu\varphi\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow$$

$$(R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2g}{3}\eta\mu\varphi = 0 \qquad (10)$$

Η (10) αποτελεί την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του κέντρου μάζας του κυλιόμενου κυλίνδρου. Εάν η αρχική τιμή φ_0 της γωνίας φ είναι πολύ μικρή τότε μπορούμε κάθε στιγμή να γράφουμε την προσεγγιστική σχέση $\eta\mu\varphi \approx \varphi$, όπου η γωνία φ θεωρείται σε rad και τότε η (10) γράφεται:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2g\varphi}{3(R-r)} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0 \qquad (5)$$

με $k^2=2g/3(R-r)$. Η (5) απότελεί την τυπική διαφορική εξίσωση μιας αρμονικής κίνησης, της οποίας η περίοδος T_* δίνεται από την σχέση:

$$T_* = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\frac{\sqrt{3(R-r)}}{2g} \qquad (6)$$

Στην διάρκεια λοιπόν που ο κύλίνδρος κυλίεται χωρίς ολίσθηση στην κοίλη επιφάνεια του κυλίνδρου, το κέντρο μάζας του εκτελεί με καλή προσέγγιση γραμμική αρμονική ταλάντωση.

P.M. fysikos

ΑΣΚΗΣΗ 2η **Ομογενής τροχαλία ακτίνας R κυλίεται κατά μήκος κοίλης συρμάτινης τροχιάς που είναι στερεωμένη σε κατακόρυφο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα (6). Εάν η τροχιά έχει την μορφή κυκλοειδούς καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις:**

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha(\varphi - \eta\mu\varphi) \\ y &= \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \text{ και } \alpha > 0$$

να δείξετε ότι, κατά την κύλιση της τροχαλίας ισχύει η σχέση:

$$\omega R = \left(2\alpha\eta\mu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)\frac{d\varphi}{dt}$$

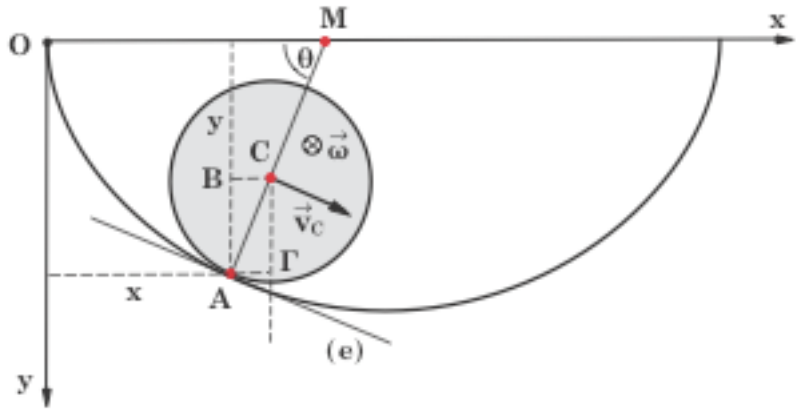
όπου $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τροχαλίας περί άξονα κάθετο στο επιπεδό της και διερχόμενο από το κέντρο της.

ΛΥΣΗ: Εάν $\vec{v}_C$ είναι η ταχύτητα του κέντρου C της κυλιόμενης τροχαλίας κατά μια τυχαία χρονική στιγμή t και $\vec{\omega}$ η αντίστοιχη γωνιακή της ταχύτητα, θα ισχύει λόγω της κυλίσεως η σχέση:

$$v_C = \omega R \tag{1}$$

Όμως για το μέτρο της $\vec{v}_C$ ισχύει η σχέση:

$$v_C^2 = \left(\frac{dx_C}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_C}{dt}\right)^2 \tag{2}$$



Σχήμα 6

όπου x_C, y_C οι συντεταγμένες του κέντρου C κατά την στιγμή t. Εξάλλου εάν x, y είναι οι αντίστοιχες συντεταγμένες του σημείου επαφής A της τροχαλίας με την κυκλοειδή τροχιά, από το σχήμα (6) θα έχουμε τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x + CB = x + R\eta\mu\left(\pi/2 - \theta\right) = x + R\sigma\upsilon\nu\theta \\ y_C &= y - C\Gamma = y - R\sigma\upsilon\nu\left(\pi/2 - \theta\right) = y - R\eta\mu\theta \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η προέκταση της AC με τον άξονα Ox. Επειδή η AC είναι ορθογώνια ως προς την εφαπτομένη (e) της κυκλοειδούς τροχιάς στο σημείο επαφής A θα ισχύει η σχέση:

$$\varepsilon\phi\left(\pi - \theta\right)\cdot\frac{dy}{dx} = -1 \;\Rightarrow\; \varepsilon\phi\theta = \frac{dx}{dy} \tag{4}$$

Διαφορίζοντας τις παραμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς τροχιάς παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \alpha\left(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi\right)d\varphi \\ dy &= \alpha\eta\mu\varphi d\varphi \end{aligned}\right\}$$

οπότε η σχέση (4) γράφεται:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{\alpha\left(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi\right)d\varphi}{\alpha\eta\mu\varphi d\varphi} = \frac{2\eta\mu^2(\varphi/2)}{2\eta\mu(\varphi/2)\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)} = \frac{\eta\mu(\varphi/2)}{\sigma\upsilon\nu(\varphi/2)} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\theta = \varepsilon\phi(\varphi/2) \Rightarrow \theta = \varphi/2 \quad (5)$$

Συνδυάζοντας την (5) με τις σχέσεις (3) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x + R\sigma\upsilon\nu(\varphi/2) \\ y_C &= y - R\eta\mu(\varphi/2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_C &= \alpha\left(\varphi - \eta\mu\varphi\right) + R\sigma\upsilon\nu\left(\varphi/2\right) \\ y_C &= \alpha\left(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi\right) - R\eta\mu\left(\varphi/2\right) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (6) ως προς τον χρόνο t παίρνουμε:

$$\frac{dx_C}{dt} = \alpha\left(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt} - \frac{R}{2}\eta\mu\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \left(2\alpha\eta\mu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{dt} \quad (7)$$

και

$$\frac{dy_C}{dt} = \alpha\eta\mu\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \frac{R}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \left(2\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d\varphi}{dt} \quad (8)$$

Η (2) λόγω των (7) και (8) γράφεται:

$$v_C^2 = \left(2\alpha\eta\mu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)^2\eta\mu^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(2\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)^2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$v_C^2 = \left[\eta\mu^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\left(2\alpha\eta\mu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(2\alpha\eta\mu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \Rightarrow$$

$$v_C = \left(2\alpha\eta\mu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \quad (9)$$

Η (9) συνδυαζόμενη με την (1) δίνει την αποδεικτέα σχέση:

$$\omega R = \left(2\alpha\eta\mu\frac{\varphi}{2} - \frac{R}{2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

P.M. fysikos